



Lineare Algebra (Informatik)

Übungsblatt 10

Aufgabe 1 (Koordinatendarstellung verketteter linearer Abbildungen) Zeigen Sie, dass für alle V, W, U Vektorräume mit Basen $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ bzw. $\mathcal{C}$, und alle linearen Abbildungen $f : W \rightarrow U, g : V \rightarrow W$:

$$M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{A}}(f \circ g) = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(f) \cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(g).$$

Lösung 1

Die Matrizen $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(f)$ und $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(g)$ beschreiben jeweils Abbildungen

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(g) : K^{n_1} \rightarrow K^{n_2}, \quad v \mapsto M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(g) \cdot v,$$

$$M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(f) : K^{n_2} \rightarrow K^{n_3}, \quad v \mapsto M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(f) \cdot v$$

und es gilt nach Definition:

$$M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(f) = \phi_{\mathcal{C}}^{-1} \circ f \circ \phi_{\mathcal{B}}$$

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(g) = \phi_{\mathcal{B}}^{-1} \circ g \circ \phi_{\mathcal{A}}$$

$$\begin{aligned} \implies M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(f) \cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(g) &= \phi_{\mathcal{C}}^{-1} \circ f \circ \phi_{\mathcal{B}} \circ \phi_{\mathcal{B}}^{-1} \circ g \circ \phi_{\mathcal{A}} \\ &= \phi_{\mathcal{C}}^{-1} \circ f \circ g \circ \phi_{\mathcal{A}} \\ &= M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{A}}(f \circ g). \end{aligned}$$

Aufgabe 2 (Basiswechsel)

Sei $f \in \text{Hom}(V, W)$ mit $V = W = \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1 + 3x_2 \\ 3x_1 + x_2 \end{pmatrix}.$$

Sei $\mathcal{B} = \left\{ b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ die kanonische Basis von $\mathbb{R}^2$ und sei $\mathcal{B}' = \left\{ b'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, b'_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ eine weitere Basis.

Bestimmen Sie:

- (i) die Matrix $M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(\text{id}_V)$ der Koordinatentransformation, die zum Basiswechsel $\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'$ gehört, sowie die Matrix $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(\text{id}_V)$ der Koordinatentransformation, die zum Basiswechsel $\mathcal{B}' \rightarrow \mathcal{B}$ gehört.
- (ii) die Koordinatendarstellung von f bezüglich
 - a) der Basen $\mathcal{B}$ von V und $\mathcal{B}$ von W ;
 - b) der Basen $\mathcal{B}'$ von V und $\mathcal{B}'$ von W ;
 - c) der Basen $\mathcal{B}'$ von V und $\mathcal{B}$ von W .

Lösung 2

- (i) Es gilt $\phi_{\mathcal{B}}^{-1}(b'_1) = b'_1, \phi_{\mathcal{B}}^{-1}(b'_2) = b'_2, \phi_{\mathcal{B}'}^{-1}(b'_1) = b_1$ und $\phi_{\mathcal{B}'}^{-1}(b'_2) = b_2$. Die Matrix $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(\text{id}_V)$ hat die Eigenschaft, dass

$$\begin{aligned} M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(\text{id}_V)b_1 &= b'_1 \quad \text{und} \\ M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(\text{id}_V)b_2 &= b'_2, \end{aligned}$$

also ist

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(\text{id}_V) = (b'_1 \ b'_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Der Basiswechsel von $\mathcal{B}$ nach $\mathcal{B}'$ wird von ihrer Inverse beschrieben:

$$M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(\text{id}_V) = (M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(\text{id}_V))^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \stackrel{\text{Blatt 8}}{=} \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

- (ii) Für zwei Basen $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ von $\mathbb{R}^n$ und $v \in V$ gilt

$$\phi_{\mathcal{B}}^{-1}(f(v)) = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(f)\phi_{\mathcal{A}}^{-1}(v)$$

mit $\phi_{\mathcal{A}}^{-1}(v)$ die Koordinatendarstellung des Vektors v bezüglich der Basis $\mathcal{A}$.

- a) Für $\mathcal{B}$ die kanonische Basis von $\mathbb{R}^2$ ist nach Definition $\phi_{\mathcal{B}}(b_1) = b_1, \phi_{\mathcal{B}}(b_2) = b_2$. $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$ ist also einfach die darstellende Matrix von f :

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix},$$

da diese ist genau die Matrix, die erfüllt

$$\begin{aligned} M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} &= f \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \\ M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} &= f \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- b) Für die Basiswechsel es folgt aus Aufgabe 1:

$$\begin{aligned} M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}(f) &= M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}(\text{id}_V \circ f \circ \text{id}_V) \\ &= M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}(\text{id}_V) \cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) \cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(\text{id}_V) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- c) Wieder nach Aufgabe 1):

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(f) = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(f \circ \text{id}_V)$$

$$\begin{aligned}
&= M_B^{\mathcal{B}}(f) \cdot M_B^{\mathcal{B}'}(\text{id}_V) \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Aufgabe 3 (Dimensionsformel für Untervektorräume)

Sei V ein K -Vektorraum mit $\dim V < \infty$. Seien U_1, U_2 Untervektorräume von V . Dann ist die Summe $U_1 + U_2$ definiert als

$$U_1 + U_2 := \{u_1 + u_2 \mid u_1 \in U_1, u_2 \in U_2\}$$

Zeigen Sie, dass gilt:

- (i) $U_1 + U_2$ ist Untervektorraum von V
- *(ii) $\dim(U_1 + U_2) = \dim U_1 + \dim U_2 - \dim(U_1 \cap U_2)$

Hinweis: Ergänzen Sie eine Basis von $U_1 \cap U_2$ zu einer Basis von $U_1 + U_2$.

Lösung 3

- (i) Seien $v, w \in U_1 + U_2, \lambda \in K$. Nach Definition von $U_1 + U_2$ gibt es $v_1 \in U_1, v_2 \in U_2$ mit $v = v_1 + v_2$, und $w_1 \in U_1, w_2 \in U_2$ mit $w = w_1 + w_2$. Also

$$\begin{aligned}
v + w &= v_1 + v_2 + w_1 + w_2 \\
&= \underbrace{(v_1 + w_1)}_{\in U_1} + \underbrace{(v_2 + w_2)}_{\in U_2} \in U_1 + U_2 \quad \text{und} \\
\lambda v &= \lambda(v_1 + v_2) \\
&= \underbrace{(\lambda v_1)}_{\in U_1} + \underbrace{(\lambda v_2)}_{\in U_2} \in U_1 + U_2
\end{aligned}$$

- (ii) Seien $n = \dim(U_1), m = \dim(U_2)$ und $k = \dim(U_1 \cap U_2)$. Sei $\mathcal{A} = \{w_1, \dots, w_k\}$ eine Basis von $U_1 \cap U_2$; wir haben in der Vorlesung schon gezeigt, dass $U_1 \cap U_2$ ein Untervektorraum von V ist (Satz 4.3.1).

Wir ergänzen $\mathcal{A}$ zu einer Basis $\mathcal{B}_1$ von U_1 ; dafür benötigen wir $n - k$ weitere Vektoren in $U_1 \setminus U_2$:

$$\mathcal{B}_1 = \{w_1, \dots, w_k, u_1, \dots, u_{n-k}\}.$$

Analog ergänzen wir $\mathcal{A}$ zu einer Basis $\mathcal{B}_2$ von U_2 :

$$\mathcal{B}_2 = \{w_1, \dots, w_k, u'_1, \dots, u'_{m-k}\}.$$

Wir behaupten, dass

$$\mathcal{B} := \{w_1, \dots, w_k, u_1, \dots, u_{n-k}, u'_1, \dots, u'_{m-k}\}$$

eine Basis von $U_1 + U_2$ ist.

- $\mathcal{B}$ erzeugt $U_1 + U_2$: Sei $v \in U_1 + U_2, v = v_1 + v_2$ mit $v_1 \in U_1, v_2 \in U_2$. v_1 lässt sich als Linearkombination von Vektoren in $\mathcal{B}_1 \subseteq \mathcal{B}$ schreiben, v_2 als Linearkombination von Vektoren in $\mathcal{B}_2 \subseteq \mathcal{B}$ schreiben. Die Summe dieser beiden Linearkombinationen ist eine Linearkombination für v .

– $\mathcal{B}$ ist linear unabhängig: Sei

$$\underbrace{\lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_k w_k + \mu_1 u_1 + \dots + \mu_{n-k} u_{n-k}}_{=:v} + \underbrace{\mu'_1 u'_1 + \dots + \mu_{m-k} u'_{m-k}}_{=-v} = 0 \quad (*)$$

eine Linearkombination des Nullvektors. Dann sind

$$v := \lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_k w_k + \mu_1 u_1 + \dots + \mu_{n-k} u_{n-k} \in U_1 \quad \text{und} \quad (1)$$

$$-v := \mu'_1 u'_1 + \dots + \mu_{m-k} u'_{m-k} \in U_2 \quad (2)$$

die eindeutige Linearkombinationen für v und $-v$ in $\mathcal{B}_1$ bzw. $\mathcal{B}_2$. Da $-v \in U_2$, muss auch $(-1) \cdot (-v) = v \in U_2$ liegen. Also ist $v \in U_1 \cap U_2$. Dies bedeutet aber, dass v sich als Linearkombination von Vektoren schreiben lässt, die ausschließlich in $\mathcal{A}$ liegen, also

$$\begin{aligned} v &= \lambda'_1 w_1 + \dots + \lambda'_k w_k \\ &= \lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_k w_k + \mu_1 u_1 + \dots + \mu_{n-k} u_{n-k}. \end{aligned}$$

$\mathcal{B}$ ist eine Basis von U_1 , also ist (1) die *eindeutige* Linearkombination für v

$$\begin{aligned} \implies \lambda'_i &= \lambda_i \quad \forall i \leq k \quad \text{und} \\ \mu_i &= 0 \quad \forall i \leq n-k. \end{aligned}$$

Dann ist aber

$$\begin{aligned} -v &= -(\lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_k w_k) \\ &= (-\lambda_1) w_1 + \dots + (-\lambda_k) w_k \\ &= \mu'_1 u'_1 + \dots + \mu_{m-k} u'_{m-k} \end{aligned}$$

und somit

$$\lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_k w_k + \mu'_1 u'_1 + \dots + \mu_{m-k} u'_{m-k} = 0$$

Da $\mathcal{B}_2$ eine Basis ist folgt, dass $\lambda_i = 0 \quad \forall i \leq k$ und $\mu'_i = 0 \quad \forall i \leq m-k$.

Aufgabe 4 (Orthogonalmatrizen)

Sei $n \in \mathbb{N}$ gegeben. Wir betrachten die Gruppe der orthogonalen Matrizen:

$$O(n) := \{M \in \mathbb{R}^{n \times n} : M \cdot M^T = M^T \cdot M = E_n\}$$

- (i) Zeigen Sie, dass $(O(n), \cdot)$ tatsächlich eine Gruppe ist.
- (ii) Wir definieren für zwei Vektoren $v = (v_1, \dots, v_n), w = (w_1, \dots, w_n)$ in $\mathbb{R}^n$ ihr (*standard*) *Skalarprodukt*

$$\langle v, w \rangle := \sum_{i=1}^n v_i w_i = v^T \cdot w,$$

wobei für die letzte Gleichheit die Vektoren als Matrizen in $\mathbb{R}^{n \times 1}$ interpretiert werden. Zeigen Sie, dass die orthogonalen Matrizen das Skalarprodukt invariant lassen, d.h.

$$\forall v, w \in \mathbb{R}^n \text{ und } \forall M \in O(n) : \langle v, w \rangle = \langle Mv, Mw \rangle$$

- (iii) Sei $A = (v_1 \quad \dots \quad v_n) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine Matrix, sodass für je zwei ihrer Spaltenvektoren v_i, v_j gilt:

$$\langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij}.$$

Zeigen Sie, dass $A \in O(n)$.

Lösung 4

- (i) Wir zeigen, dass $O(n)$ eine *Untergruppe* der Gruppe der invertierbaren Matrizen $GL(n, \mathbb{R})$ ist, und somit selbst eine Gruppe bezüglich Matrixmultiplikation: Seien $A, B \in O(n)$. Dann

$$\begin{aligned}(AB)(AB)^T &= (AB)(B^T A^T) \quad (\text{Satz 4.4.3}) \\ &= A(BB^T)A^T \quad (\text{Assoziativität von Matrixmultiplikation}) \\ &= AA^T = E_n \quad (A, B \in O(n))\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}A^{-1}(A^{-1})^T &= A^T(A^T)^T \quad (\text{da } A \in O(n)) \\ &= A^T A = E_n.\end{aligned}$$

Also lässt sich Matrixmultiplikation auf $O(n)$ einschränken. Somit sind die Axiome einer Gruppe alle erfüllt: Assoziativität ist gegeben, da Matrixmultiplikation assoziativ ist, Existenz von Inversen in $O(n)$ haben wir direkt nachgewiesen, und Existenz des neutralen Elements $E_n \in O(n)$ ist klar.

- (ii) Seien $v, w \in \mathbb{R}^n, M \in O(n)$. Dann:

$$\langle Mv, Mw \rangle = (Mv)^T(Mw) = v^T M^T M w = v^T w = \langle v, w \rangle.$$

Bemerkung: Dies ist eine äquivalente Charakterisierung orthogonaler Matrizen — die obige Gleichung kann für eine Matrix $M \in GL(n, \mathbb{R})$ nur stimmen, wenn $M^T M = E_n$

- (iii) Wir zeigen, dass $A^T A = E_n = (\delta_{ij})$. Nach Definition von A ist der Eintrag $A_{ij} = (v_j)_i$. Also:

$$\begin{aligned}(A^T A)_{ij} &= \sum_{k=1}^n (A^T)_{ik} A_{kj} \\ &= \sum_{k=1}^n A_{ki} A_{kj} \\ &= \sum_{k=1}^n (v_i)_k (v_j)_k \\ &= \langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij}.\end{aligned}$$